成都市2021级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1.B; 2.C; 3.B; 4.C; 5.A; 6.A; 7.D; 8.B; 9.C; 10.D; 11.C; 12.D.

第Ⅱ卷 (非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13.三棱柱,三棱锥,圆锥等(其他正确答案同样给分); 14. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$;

15. $8\sqrt{3}$; 16.②③④.

三、解答题:(共70分)

17.解:(Ⅰ)设转换公式中转换分 y 关于原始成绩 x 的一次函数关系式为 $y=ax+b$

则 $\begin{cases}78=84a+b,\\71=78a+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\dfrac{7}{6},\\b=-20.\end{cases}$ ……3分

∵转换分的最高分为85,

∴ $85=\dfrac{7}{6}x-20$,解得 $x=90$.

故该市本次化学原始成绩B等级中的最高分为90分. ……6分

(Ⅱ)∵ $10(0.005+0.010+0.012+0.015+0.033+a)=1$,

∴ $a=0.025$. ……9分

设化学原始成绩B等级中的最低分为 x,

∵ $10\times0.010+10\times0.015+10\times0.025=0.5$,

∴ $x=70$.

综上,化学原始成绩B等级中的最低分为70. ……12分

18.解:(Ⅰ)当 $n=1$ 时,$a_1=S_1(2)=0$. ……1分

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n(2)-S_{n-1}(2)=(2+2^2+\cdots2^n-2)-(2+2^2+\cdots2^{n-1}-2)=2^n$.

……5分

又当 $n=1$ 时,$a_1=0$ 不满足上式,

所以 $a_n=\begin{cases}0, & n=1,\\2^n, & n\geqslant2.\end{cases}$ ……6分

(Ⅱ)∵ $S_{2024}(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^{2024}-2$,

∴ $S'_{2024}(x)=1+2x+3x^2+\cdots+2024x^{2023}$. ……7分

$S'_{2024}(2)=1+2\times2+3\times2^2+\cdots+2024\times2^{2023}$ ……①,

$2S'_{2024}(2)=2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+2024\times2^{2024}$ ……②,

①－②得，$-S'_{2024}(2)=1+1\times 2+1\times 2^2+\cdots+1\times 2^{2023}-2024\times 2^{2024}$ ……10 分

$=\dfrac{1-2^{2024}}{1-2}-2024\times 2^{2024}=-2023\times 2^{2024}-1.$ ……11 分

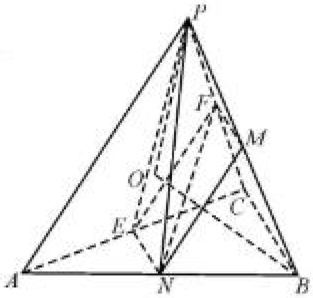
$\therefore S'_{2024}(2)=2023\times 2^{2024}+1.$ ……12 分

19. 解：(Ⅰ)在$\triangle PBA$中，$\because M,N$是棱PB,AB的中点，

$\therefore MN\parallel PA$．同理可得$EF\parallel PA$． ……3 分

$\therefore MN\parallel EF$．

$\therefore M,N,E,F$四点共面． ……5 分



(Ⅱ)连接NF．

由(Ⅰ)，$MN=EF=\dfrac{1}{2}PA$，

$\therefore$四边形$MNEF$为平行四边形．

$\therefore V_{P-MNEF}=2V_{P-NFE}=2V_{N-PEF}=V_{B-PEF}$． ……8 分

$\because$四面体$P-ABC$为正四面体，

$\therefore B$在底面PAC内的射影O为$\triangle PAC$的中心． ……9 分

$\therefore OP=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．

在$\triangle PBO$中，$BO=\sqrt{PB^2-PO^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$． ……10 分

$\therefore V_{B-PEF}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle PEF}\cdot BO=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$．

$\therefore V_{P-MNEF}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$． ……12 分

20. 解：(Ⅰ)设$M(x_1,y_1)$，$S(x_1,-y_1)$．

$\because k_{AM}=\dfrac{y_1}{x_1+a}$，$k_{BS}=\dfrac{-y_1}{x_1-a}$， ……1 分

$\therefore k_{AM}\cdot k_{BS}=\dfrac{y_1}{x_1+a}\cdot\dfrac{-y_1}{x_1-a}=\dfrac{-y_1^2}{x_1^2-a^2}$． ……2 分

$\because M(x_1,y_1)$在双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{5}=1(a>0)$上，

$\therefore k_{AM}\cdot k_{BS}=\dfrac{-y_1^2}{x_1^2-a^2}=\dfrac{-5\left(\dfrac{x_1^2}{a^2}-1\right)}{x_1^2-a^2}=-\dfrac{5}{a^2}=-\dfrac{5}{4}$．解得$a=2$． ……4 分

$\therefore$双曲线C的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$． ……5 分

(Ⅱ)设$N(x_2,y_2)$，直线MN：$x=my+3$．

由$\begin{cases}x=my+3,\\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1\end{cases}$消去$x$，得$(5m^2-4)y^2+30my+25=0$．

$m\neq\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\Delta=400(m^2+1)>0$．

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{-30m}{5m^2-4}$，$y_1y_2=\dfrac{25}{5m^2-4}$. ……6分

直线 BM：$y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，

令 $x=1$，解得 $y_P=\dfrac{-y_1}{x_1-2}$. 同理可得 $y_Q=\dfrac{-y_2}{x_2-2}$. ……7分

$\because$ 以 PQ 为直径的圆的方程为 $(x-1)(x-1)+(y+\dfrac{y_1}{x_1-2})(y+\dfrac{y_2}{x_2-2})=0$，

……8分

令 $y=0$，得 $(x-1)^2+\dfrac{y_1}{x_1-2}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-2}=0$.

$$\therefore (x-1)^2+\frac{y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=(x-1)^2+\frac{y_1y_2}{(my_1+1)(my_2+1)}$$

$$=(x-1)^2+\frac{\frac{25}{5m^2-4}}{m^2\cdot\frac{25}{5m^2-4}+m\cdot\frac{-30m}{5m^2-4}+1}$$

$$=(x-1)^2+\frac{25}{25m^2-30m^2+5m^2-4}$$

$$=(x-1)^2-\frac{25}{4}=0.$$ ……10分

$\therefore (x-1)^2=\dfrac{25}{4}$，解得 $x=-\dfrac{3}{2}$ 或 $x=\dfrac{7}{2}$.

$\therefore$ 以 PQ 为直径的圆恒过点 $(-\dfrac{3}{2},0)$，$(\dfrac{7}{2},0)$. ……12分

1. 解：(Ⅰ) $\because f'(x)=e^{x-1}+\dfrac{2}{(x+1)^2}$. ……1分

当 $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(-1,+\infty)$ 上单调递增； ……2分

$\because$ 当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f(x)>0$； ……3分

当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$f(1)=0$. ……4分

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ 上有且仅有一个零点； ……5分

(Ⅱ) $\because af(x)\leqslant\dfrac{e^x}{e}+\ln x-1$，

$\therefore a(\dfrac{e^x}{e}-\dfrac{2}{x+1})-\dfrac{e^x}{e}-\ln x+1\leqslant 0$.

设 $g(x)=a(\dfrac{e^x}{e}-\dfrac{2}{x+1})-\dfrac{e^x}{e}-\ln x+1=(a-1)e^{x-1}-\ln x-\dfrac{2a}{x+1}+1$.

(i) 当 $a>1$ 时，由 $x\to+\infty$，$f(x)\to+\infty$，不合题意，

$\therefore$ 当 $a>1$ 时，不合题意. ……7分

(ii) 当 $a\leqslant 1$ 时，由(Ⅰ) $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增.

又 $f(1)=0$，∴ $f(x)\geqslant 0$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立. ……8 分

∴ $g(x)=a(\frac{e^x}{e}-\frac{2}{x+1})-\frac{e^x}{e}-\ln x+1\leqslant\frac{e^x}{e}-\frac{2}{x+1}-\frac{e^x}{e}-\ln x+1$

$=-\frac{2}{x+1}-\ln x+1.$ ……10 分

设 $n(x)=-\frac{2}{x+1}-\ln x+1$

∴ $n'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x}=\frac{2x-(x+1)^2}{x(x+1)^2}=\frac{-(x^2+1)}{x(x+1)^2}$.

∵ $n'(x)<0$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立，∴ $n(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减.

又 $n(1)=0$，∴ $n(x)<0$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立.

∴ $a(\frac{e^x}{e}-\frac{2}{x+1})\leqslant e^{x-1}+\ln x-1$. 满足题意.

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,1]$. ……12 分

2. 解：(Ⅰ)由曲线 C 的参数方程可得 $(x-2)^2+y^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$， ……1 分

化简得曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=1$. ……3 分

(Ⅱ)曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta+3=0$. ……5 分

设 $A(\rho_1,\theta_1)$，$B(\rho_1,\theta_1+\frac{\pi}{2})$，$M(\rho,\theta)$. ……6 分

∵ $\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}\rho_1,\theta=\theta_1+\frac{\pi}{4}$，

∴ $\rho_1=\sqrt{2}\rho,\theta_1=\theta-\frac{\pi}{4}$. ……8 分

∴ $(\sqrt{2}\rho)^2-4\times\sqrt{2}\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})+3=0$.

∴ M 的轨迹的极坐标方程为 $\rho^2-2\sqrt{2}\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})+\frac{3}{2}=0$. ……10 分

3. 解：(Ⅰ)∵ $|x+a|+b<4$，易知 $4-b>0$，

∴ $b-a-4<x<4-a-b$. ……3 分

∵ $f(x)<4$ 的解集为 $\{x|0<x<6\}$，

∴ $\begin{cases}b-a-4=0,\\4-a-b=6\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\b=1.\end{cases}$ ……5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $f(x)=|x-3|+1$，

∴ $f(x)$ 的最小值为 1，即 $m+2n+3p=1$. ……6 分

∴ $\frac{1}{m+2p}+\frac{1}{2n+p}=(\frac{1}{m+2p}+\frac{1}{2n+p})(m+2p+2n+p)=1+1+\frac{2n+p}{m+2p}+\frac{m+2p}{2n+p}\geqslant 4$. ……9 分

当且仅当 $m+2p=2n+p=\frac{1}{2}$时，等号成立.

∴ $\frac{1}{m+2p}+\frac{1}{2n+p}$ 的最小值为 4. ……10 分

成都市2021级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1.B; 2.C; 3.B; 4.C; 5.A; 6.B; 7.D; 8.C; 9.D; 10.D; 11.A; 12.D.

第Ⅱ卷 (非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13.三棱柱,三棱锥,圆锥等(其他正确答案同样给分); 14. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$;

15. 4; 16.②③④.

三、解答题:(共70分)

17. 解:(Ⅰ)当 $n=1$ 时,$a_1=S_1(2)=0$. ……1分

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n(2)-S_{n-1}(2)=(2+2^2+\cdots 2^n-2)-(2+2^2+\cdots 2^{n-1}-2)=2^n$. ……5分

又当 $n=1$ 时,$a_1=0$ 不满足上式,

所以 $a_n=\begin{cases}0, & n=1,\\ 2^n, & n\geqslant 2\end{cases}$ ……6分

(Ⅱ)$\because S_{2024}(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^{2024}-2$,

$\therefore S'_{2024}(x)=1+2x+3x^2+\cdots+2024x^{2023}$. ……7分

$S'_{2024}(2)=1+2\times 2+3\times 2^2+\cdots+2024\times 2^{2023}$ ……①,

$2S'_{2024}(2)=2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+2024\times 2^{2024}$ ……②,

①-②得,$-S'_{2024}(2)=1+1\times 2+1\times 2^2+\cdots+1\times 2^{2023}-2024\times 2^{2024}$ ……10分

$=\dfrac{1-2^{2024}}{1-2}-2024\times 2^{2024}=-2023\times 2^{2024}-1$. ……11分

$\therefore S'_{2024}(2)=2023\times 2^{2024}+1$. ……12分

18. 解:(Ⅰ)已知本次模拟考试成绩都近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,

由题意可得 $\mu=65$. ……1分

$\because \dfrac{228}{10000}=0.0228$,又 $\dfrac{1-P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)}{2}=0.0228$. ……3分

即 $P(X>\mu+2\sigma)=0.0228$. $\therefore \mu+2\sigma=87$,解得 $\sigma=11$. ……4分

$\because$甲市学生 A 在该次考试中成绩为76分,且 $76=\mu+\sigma$,

又 $\dfrac{1-P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)}{2}=0.1587$,即 $P(X>\mu+\sigma)=0.1587$. ……5分

$\therefore$学生 A 在甲市本次考试的大致名次为1587名. ……6分

(Ⅱ)在本次考试中,抽取1名化学成绩在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之内的概率为0.9974.

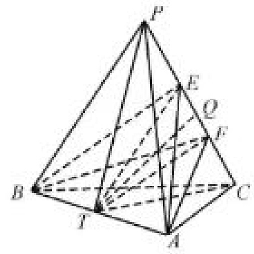
$\therefore$抽取1名化学成绩在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的概率为0.0026. ……7分

$\therefore$随机变量 X 服从二项分布，即 $X \sim B(40, 0.0026)$. ……9分

$\therefore P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.9974^{40} \approx 0.0989$. ……10分

X 的数学期望为 $EX = np = 40 \times 0.0026 = 0.104$. ……12分

19. 解：(Ⅰ)取 AB 的中点为 T，连接 PT, CT.



$\because$四面体 $P-ABC$ 为正四面体，

$\therefore \triangle ABP$ 为正三角形. ……1分

又 T 为 AB 的中点，

$\therefore PT \perp AB$. 同理可得 $CT \perp AB$. ……3分

$\because PT \cap CT = T$，$PT, CT \subset$ 平面 PTC，

$\therefore AB \perp$ 平面 PTC. ……5分

又 $PC \subset$ 平面 PTC，$\therefore AB \perp PC$. ……6分

(Ⅱ)取 PC 的中点为 Q，连接 ET, FT, QT，设 $PA = 6a$.

由(Ⅰ)得 $AB \perp$ 平面 PTC.

$\because ET, FT \subset$ 平面 PTC，$\therefore AB \perp ET$，$AB \perp FT$.

$\therefore \angle PTE$ 为二面角 $P-AB-E$ 的平面角，$\angle ETF$ 为二面角 $E-AB-F$ 的平面角，$\angle FTC$ 为二面角 $F-AB-C$ 的平面角. ……7分

由图形对称性可判断 $\angle PTE = \angle FTC$. ……8分

易得 $PT = CT = 3\sqrt{3}a$，$\therefore TQ \perp PC$.

在$\triangle TPQ$ 中，$TQ = \sqrt{PT^2 - PQ^2} = 3\sqrt{2}a$.

在$\triangle ETQ$ 中，$ET = \sqrt{EQ^2 + TQ^2} = \sqrt{19}a$. 同理可得 $FT = \sqrt{19}a$.

$\therefore \cos\angle PTE = \dfrac{PT^2 + ET^2 - PE^2}{2PT \cdot ET} = \dfrac{7\sqrt{57}}{57}$，$\cos\angle ETF = \dfrac{ET^2 + FT^2 - EF^2}{2ET \cdot FT} = \dfrac{17}{19}$.

……11分

$\because \cos\angle PTE > \cos\angle ETF$，$\therefore \angle PTE < \angle ETF$.

$\therefore$二面角 $E-AB-F$ 的平面角最大，其余弦值等于 $\dfrac{17}{19}$. ……12分

20. 解：(Ⅰ)设 $M(x_1, y_1)$，$S(x_1, -y_1)$.

$\because k_{AM} = \dfrac{y_1}{x_1 + a}$，$k_{BS} = \dfrac{-y_1}{x_1 - a}$， ……1分

$\therefore k_{AM} \cdot k_{BS} = \dfrac{y_1}{x_1 + a} \cdot \dfrac{-y_1}{x_1 - a} = \dfrac{-y_1^2}{x_1^2 - a^2}$. ……2分

$\because M(x_1, y_1)$ 在双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{5} = 1 (a > 0)$ 上，

$\therefore k_{AM} \cdot k_{BS} = \dfrac{-y_1^2}{x_1^2 - a^2} = \dfrac{-5(\frac{x_1^2}{a^2} - 1)}{x_1^2 - a^2} = -\dfrac{5}{a^2} = -\dfrac{5}{4}$. 解得 $a = 2$. ……4分

$\therefore$双曲线 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$. ……5分

(Ⅱ)设 $N(x_2, y_2)$，直线 MN：$x = my + 3$.

由 $\begin{cases} x=my+3, \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1 \end{cases}$ 消去 x，得 $(5m^2-4)y^2+30my+25=0$.

$m \neq \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\Delta=400(m^2+1)>0$.

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{-30m}{5m^2-4}$，$y_1y_2=\dfrac{25}{5m^2-4}$. ……6 分

直线 BM：$y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，

令 $x=1$，解得 $y_P=\dfrac{-y_1}{x_1-2}$. 同理可得 $y_Q=\dfrac{-y_2}{x_2-2}$. ……7 分

$\because$ 以 PQ 为直径的圆的方程为 $(x-1)(x-1)+(y+\dfrac{y_1}{x_1-2})(y+\dfrac{y_2}{x_2-2})=0$，

……8 分

由对称性可得，若存在定点，则定点一定在 x 轴上.

令 $y=0$，得 $(x-1)^2+\dfrac{y_1}{x_1-2}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-2}=0$.

$$\therefore (x-1)^2+\frac{y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=(x-1)^2+\frac{y_1y_2}{(my_1+1)(my_2+1)}$$

$$=(x-1)^2+\frac{\dfrac{25}{5m^2-4}}{m^2\cdot\dfrac{25}{5m^2-4}+m\cdot\dfrac{-30m}{5m^2-4}+1}$$

$$=(x-1)^2+\frac{25}{25m^2-30m^2+5m^2-4}$$

$$=(x-1)^2-\frac{25}{4}=0.$$ ……10 分

$\therefore (x-1)^2=\dfrac{25}{4}$，解得 $x=-\dfrac{3}{2}$ 或 $x=\dfrac{7}{2}$.

$\therefore$ 以 PQ 为直径的圆恒过点 $(-\dfrac{3}{2},0)$，$(\dfrac{7}{2},0)$. ……12 分

1. 解：(Ⅰ)当 $a=\dfrac{1}{8}$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{4}e^x-\sqrt{x}$，$f(0)=\dfrac{1}{4}\neq 0$.

$\because f'(x)=\dfrac{1}{4}e^x-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$，$f''(x)=\dfrac{1}{4}e^x+\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$， ……1 分

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f''(x)>0$，

$\therefore$ 函数 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……2 分

由 $f'(\dfrac{1}{4})=\dfrac{1}{4}e^{\frac{1}{4}}-1<0$，$f'(1)=\dfrac{1}{4}e-\dfrac{1}{2}>0$，

$\therefore \exists x_0\in(\dfrac{1}{4},1)$，使得 $f'(x_0)=0$. ……3 分

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 单调递增.

又 $f(\frac{1}{100}) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{100}} - \frac{1}{10} > 0$，$f(1) = \frac{1}{4}e - 1 < 0$，$f(4) = \frac{1}{4}e^4 - 2 > 0$，

$\therefore f(x)$ 有两个零点. ……5 分

(Ⅱ) $\because$ 存在 $b \in (0, +\infty)$，使得当 $x \in (b, b+2024)$ 时，$f(x) > e^x - a\ln(x+1) + 2a - 1$，

即存在 $b \in (0, +\infty)$，使得当 $x \in (b, b+2024)$ 时，$(2a-1)(e^x-1) + a\ln(x+1) - \sqrt{x} > 0$.

设 $g(x) = (2a-1)(e^x-1) + a\ln(x+1) - \sqrt{x}$.

(i)当 $a > \frac{1}{2}$ 时，设 $h(x) = e^x - x - 1$.

$\therefore h'(x) = e^x - 1$.

$\because h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，又 $h'(0) = 0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 又 $h(0) = 0$，

$\therefore h(x) > 0$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立. ……6 分

$\therefore g(x) = (2a-1)(e^x-1) + a\ln(x+1) - \sqrt{x} > (2a-1)x - \sqrt{x}$.

$\therefore$ 当 $x \geqslant \frac{1}{(2a-1)^2}$ 时，$g(x) > 0$.

取 $b = \frac{1}{(2a-1)^2}$，当 $x \in (b, b+2024)$ 时，$g(x) > 0$ 恒成立.

$\therefore$ 当 $a > \frac{1}{2}$ 时满足题意. ……8 分

(ii)当 $a \leqslant \frac{1}{2}$ 时，设 $w(x) = 2e^x + \ln(x+1) - 2$.

$\therefore w'(x) = 2e^x + \frac{1}{x+1}$.

$\because w'(x) > 0$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立，$\therefore w(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $w(0) = 0$，$\therefore w(x) > 0$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立. ……9 分

$\therefore g(x) = a[2e^x + \ln(x+1) - 2] - e^x - \sqrt{x} + 1 \leqslant e^x + \frac{1}{2}\ln(x+1) - 1 - e^x - \sqrt{x} + 1$

$= \frac{1}{2}\ln(x+1) - \sqrt{x}$. ……10 分

设 $n(x) = \frac{1}{2}\ln(x+1) - \sqrt{x}$.

$\therefore n'(x) = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - (x+1)}{2(x+1)\sqrt{x}} = \frac{-(\sqrt{x} - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}}{2(x+1)\sqrt{x}}$.

$\because n'(x) < 0$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立，$\therefore n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

又 $n(0) = 0$，$\therefore n(x) < 0$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立.

故 $g(x) \leqslant 0$ 恒成立，不合题意.

综上，a 的取值范围为 $(\frac{1}{2}, +\infty)$. ……12 分

22. **解**：(Ⅰ)由曲线 C 的参数方程可得 $(x-2)^2+y^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$， ……1 分

化简得曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=1$. ……3 分

(Ⅱ)曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta+3=0$. ……5 分

设 $A(\rho_1,\theta_1)$，$B(\rho_1,\theta_1+\frac{\pi}{2})$，$M(\rho,\theta)$. ……6 分

$\because \rho=\frac{\sqrt{2}}{2}\rho_1,\theta=\theta_1+\frac{\pi}{4}$，

$\therefore \rho_1=\sqrt{2}\rho,\theta_1=\theta-\frac{\pi}{4}$. ……8 分

$\therefore (\sqrt{2}\rho)^2-4\times\sqrt{2}\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})+3=0$.

$\therefore M$ 的轨迹的极坐标方程为 $\rho^2-2\sqrt{2}\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})+\frac{3}{2}=0$. ……10 分

23. **解**：(Ⅰ)$\because |x+a|+b<4$，易知 $4-b>0$，

$\therefore b-a-4<x<4-a-b$. ……3 分

$\because f(x)<4$ 的解集为 $\{x\,|\,0<x<6\}$，

$\therefore \begin{cases}b-a-4=0,\\4-a-b=6\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\b=1.\end{cases}$ ……5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $f(x)=|x-3|+1$，

$\therefore f(x)$ 的最小值为 1，即 $m+2n+3p=1$. ……6 分

$\therefore \frac{1}{m+2p}+\frac{1}{2n+p}=(\frac{1}{m+2p}+\frac{1}{2n+p})(m+2p+2n+p)=1+1+\frac{2n+p}{m+2p}+\frac{m+2p}{2n+p}\geqslant 4$. ……9 分

当且仅当 $m+2p=2n+p=\frac{1}{2}$ 时，等号成立.

$\therefore \frac{1}{m+2p}+\frac{1}{2n+p}$ 的最小值为 4. ……10 分