

成都市2021级高中毕业班第二次诊断性检测
数学（理科）答题卡

姓名

座位号

考籍号

贴条形码区

(正面朝上切勿贴出虚线框外)


考生禁填

缺考标记 ☐

缺考考生由监考员贴条形码，并用2B铅笔填涂上面的缺考标记。

注意事项

1. 答题前，考生务必先认真核对条形码上的姓名、考籍号和座位号，无误后将本人姓名、考籍号和座位号填写在相应位置，同时将背面左上角相应的座位号涂黑。

2. 选择题填涂时，必须使用2B铅笔按  图示规范填涂；非选择题必须使用0.5毫米的黑色墨迹签字笔作答；作图题可先用铅笔绘出，确认后再用0.5毫米黑色墨迹签字笔描清楚。

3. 必须在题目所指示的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效，在草稿纸、试题卷上答题无效。

4. 保持答题卡清洁、完整，严禁折叠，严禁使用涂改液和修正带。

第Ⅰ卷(选择题,共60分)

(考生须用2B铅笔填涂)

1 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D	5 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D	9 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D
2 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D	6 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D	10 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D
3 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D	7 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D	11 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D
4 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D	8 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D	12 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D

第Ⅱ卷(非选择题,共90分)

(考生须用0.5毫米的黑色墨迹签字笔书写)

13. _____

14. _____

15. _____

16. _____

17.

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

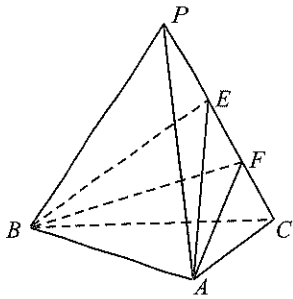
请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

18.

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

19.



请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

20.

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

21.

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

请在各题规定的黑色矩形区域内答题，超出该区域的答案无效！

第II卷【选考题】

以下为选考题，每个答题区只允许选答一题，答题前，请考生务必将所选题号用2B铅笔涂黑。

22. 23.

请考生从22、23二题中任选一题做答，并用2B铅笔将所选题号涂黑，多涂、错涂、漏涂均不给分。如果多做，则按所做的第一题计分。

请在各题规定的黑色矩形区域内答题，超出该区域的答案无效！

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

成都市2021级高中毕业班第二次诊断性检测
数学（文科）答题卡

姓名

座位号

考籍号

贴条形码区

(正面朝上切勿贴出虚线框外)

考生禁填

缺考标记

缺考考生由监考员贴条形码，并用2B铅笔填涂上面的缺考标记。

注意事项

1. 答题前，考生务必先认真核对条形码上的姓名、考籍号和座位号，无误后将本人姓名、考籍号和座位号填写在相应位置，同时将背面左上角相应的座位号涂黑。

2. 选择题填涂时，必须使用2B铅笔按图示规范填涂，非选择题必须使用0.5毫米的黑色墨迹签字笔作答。

3. 必须在题目所指示的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效，在草稿纸、试答题卷上答题无效。

4. 保持答题卡清洁、完整，严禁折叠，严禁使用涂改液和修正带。

第I卷

(须用2B铅笔填涂)

填涂样例

错误填涂

正确填涂

1

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

2

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

3

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

4

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

5

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

6

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

7

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

8

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

9

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

10

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

11

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

12

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

第II卷 【必考题】

(须用0.5毫米的黑色字迹中性笔书写)

13.

14.

15.

16.

17.

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

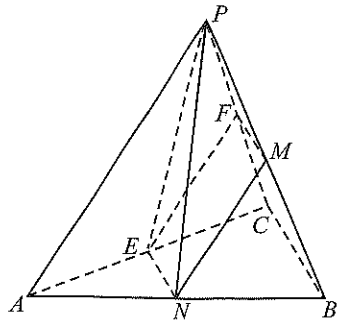
请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

18.

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

19.



请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

20.

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

21.

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

第II卷【选考题】

以下为选考题,每个答题区只允许选答一题,答题前,请考生务必将所选题号用2B铅笔涂黑。

22: 23

请考生从22、23二题中任选一题做答,并用2B铅笔将所选题号涂黑,多涂、错涂、漏涂均不给分,如果多做,则按所做的第一题计分。

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

成都市 2021 级高中毕业班第二次诊断性检测

数 学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设复数 $z = \frac{i}{1+i}$ (i 为虚数单位),则 $|z| =$
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{2}$
2. 命题“ $\forall x > 1, \ln x < x$ ”的否定形式是
(A) $\exists x_0 \leq 1, \ln x_0 \geq x_0$ (B) $\forall x \leq 1, \ln x < x$
(C) $\exists x_0 > 1, \ln x_0 \geq x_0$ (D) $\forall x > 1, \ln x \geq x$
3. 如图,已知集合 $A = \{x | \log_2 x < 1\}$, $B = \{x | x < 1\}$,则阴影部分表示的集合为
(A) $(1, 2)$ (B) $[1, 2)$ (C) $(0, 1]$ (D) $(0, 1)$
4. 对变量 x, y 有观测数据 $(x_i, y_i) (i \in \mathbb{N}^*)$,得散点图 1;对变量 u, v 有观测数据 $(u_i, v_i) (i \in \mathbb{N}^*)$,得散点图 2. r_1 表示变量 x, y 之间的线性相关系数, r_2 表示变量 u, v 之间的线性相关系数,则下列说法正确的是

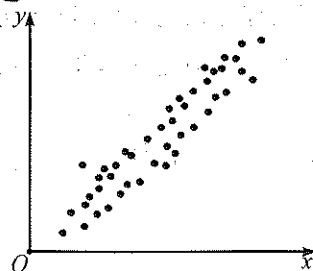


图 1

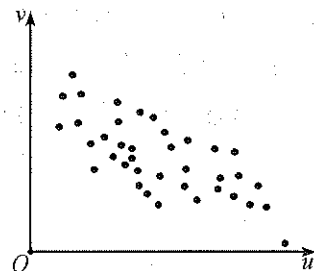


图 2

- (A) 变量 x 与 y 呈现正相关,且 $|r_1| < |r_2|$ (B) 变量 x 与 y 呈现负相关,且 $|r_1| > |r_2|$
(C) 变量 x 与 y 呈现正相关,且 $|r_1| > |r_2|$ (D) 变量 x 与 y 呈现负相关,且 $|r_1| < |r_2|$

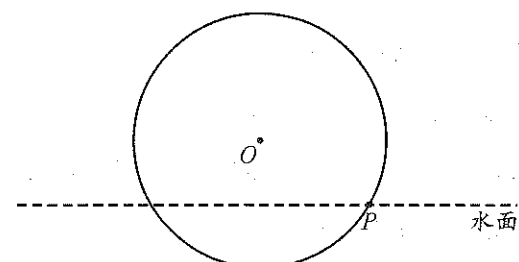
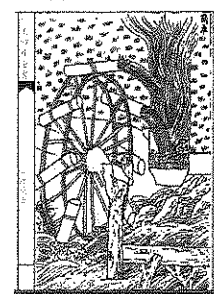
5. 在平面直角坐标系 xOy 中,角 α 的顶点与坐标原点重合,始边与 x 轴的非负半轴重合,终边经过点 $P(1, 2)$,则 $\sin 2\alpha$ 的值为

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $-\frac{4}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $-\frac{3}{5}$

6. 已知函数 $f(x) = 2^{ax^2-x+1}$ 的值域为 M . 若 $(1, +\infty) \subseteq M$,则实数 a 的取值范围是

(A) $(-\infty, \frac{1}{4}]$ (B) $[0, \frac{1}{4}]$
(C) $(-\infty, -\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, +\infty)$ (D) $[\frac{1}{4}, +\infty)$

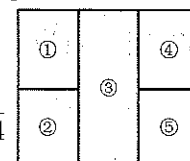
7. 筒车亦称“水转筒车”,是一种以水流作动力,取水灌田的工具,唐陈廷章《水轮赋》:“水能利物,轮乃曲成.升降满农夫之用,低徊随匠氏之程.始崩腾以电散,俄宛转以风生.虽破浪于川湄,善行无迹;既斡流于波面,终夜有声。”如图,一个半径为 4m 的筒车按逆时针方向每分钟转一圈,筒车的轴心 O 距离水面的高度为 2m. 在筒车转动的一圈内,盛水筒 P 距离水面的高度不低于 4m 的时间为



(A) 9 秒 (B) 12 秒 (C) 15 秒 (D) 20 秒

8. 现有四种不同的颜色要对如图形中的五个部分进行着色,其中任意有公共边的两块着不同颜色的概率为

(A) $\frac{144}{625}$ (B) $\frac{64}{125}$ (C) $\frac{9}{64}$ (D) $\frac{3}{64}$



9. 已知向量 e_1, e_2 是平面 α 内的一组基向量, O 为 α 内的定点,对于 α 内任意一点 P ,当 $\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2$ 时,称有序实数对 (x, y) 为点 P 的广义坐标. 若点 A, B (均不与 O 重合)的广义坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,则“ $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ ”是“ $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ ”的
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

10. 已知点 P 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的动点,若 P 到 x 轴与 y 轴的距离之和的范围是 $[3, 5]$,则椭圆 C 的离心率为

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{7}}{4}$

11. 在所有棱长均相等的直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\angle BAD = 60^\circ$,点 P 在四边形 AA_1B_1B 内(含边界)运动. 当 $C_1P = \frac{\sqrt{7}}{2}CC_1$ 时,点 P 的轨迹长度为 $\frac{2\pi}{3}$,则该四棱柱的表面积为

(A) $16 + 4\sqrt{3}$ (B) $8 + 2\sqrt{3}$ (C) $4 + \sqrt{3}$ (D) $4\sqrt{3}$

12. 已知 P 是抛物线 $C: x^2 = 4y + 20$ 上任意一点,若过点 P 作圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 的两条切线,切点分别记为 A, B ,则劣弧 AB 长度的最小值为

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) π (D) $\frac{4\pi}{3}$

第Ⅱ卷 (非选择题,共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 一个几何体的三视图的正视图是三角形,则这个几何体可以是_____. (写出一个你认为正确的答案即可)

14. 已知函数 $f(x) = 3x - \sin x$, 若 $f(a) + f(a^2 - 2) > 0$, 则实数 a 的取值范围为_____.

15. 平面四边形 $ABCD$ 中, $BC = CD = 2$, $\frac{AB}{BD} = \frac{3}{4}$, $\angle ABD = 90^\circ$, 则 AC 的最大值为_____.

16. 已知函数 $f(x) = \log_6(2^x + 3^x)$, $g(x) = \log_3(6^x - 2^x)$. 给出下列四个结论:

① $f(\frac{1}{2}) < g(\frac{1}{2})$;

② 存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f(x_0) = g(x_0) = x_0$;

③ 对于任意的 $x \in (1, +\infty)$, 都有 $f(x) < g(x)$;

④ 对于任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $|x - f(x)| \leq |g(x) - x|$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

记 $S_n(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - 2 (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^*)$.

(I) 当 $x = 2$ 时, $S_n(2)$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 记 $S'_{2024}(x)$ 是 $S_{2024}(x)$ 的导函数, 求 $S'_{2024}(2)$.

18. (本小题满分 12 分)

某省举办了一次高三年级化学模拟考试, 其中甲市有 10000 名学生参考. 根据经验, 该省及本市本次模拟考试成绩(满分 100 分)都近似服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$.

(I) 已知本次模拟考试甲市平均成绩为 65 分, 87 分以上共有 228 人. 甲市学生 A 的成绩为 76 分, 试估计学生 A 在甲市的大致名次;

(II) 在该省本次模拟考试的参考学生中随机抽取 40 人, 记 X 表示在本次考试中化学成绩在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之外的人数, 求 $P(X \geq 1)$ 的概率及 X 的数学期望.

参考数据: $0.9974^{40} \approx 0.9011$

参考公式: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 有 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6826$,

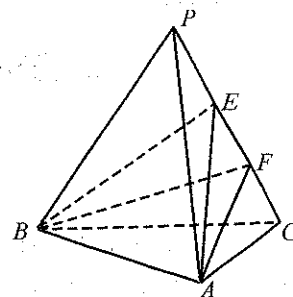
$$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544, P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9974.$$

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在正四面体 $P-ABC$ 中, E, F 是棱 PC 的两个三等分点.

(I) 证明: $AB \perp PC$;

(II) 求出二面角 $P-AB-E$, $E-AB-F$, $F-AB-C$ 的平面角中最大角的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{5} = 1 (a > 0)$ 的左、右顶点分别为 A, B , 右焦点为 F . 过点 F 的直线与双曲线 C 相交于 M, N 两点, 点 M 关于 x 轴的对称点为 S , 且直线 AM, BS 的斜率之积为 $-\frac{5}{4}$.

(I) 求双曲线 C 的标准方程;

(II) 直线 BM, BN 分别与直线 $x = 1$ 相交于 P, Q 两点, 求证: 以 PQ 为直径的圆经过定点, 并求出定点的坐标.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2ae^x - \sqrt{x}$.

(I) 当 $a = \frac{1}{8}$ 时, 判断 $f(x)$ 的零点个数并说明理由;

(II) 若存在 $b \in (0, +\infty)$, 使得当 $x \in (b, b + 2024)$ 时, $f(x) > e^x - a \ln(x + 1) + 2a - 1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \cos \alpha, \\ y = \sin \alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数}).$

(I) 求曲线 C 的普通方程;

(II) 以坐标原点 O 为极点, x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系. 若 A 为曲线 C 上任意一点, 将 OA 逆时针旋转 90° 得到 OB , 求线段 AB 中点 M 的轨迹的极坐标方程.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x + a| + b$, 不等式 $f(x) < 4$ 的解集为 $\{x | 0 < x < 6\}$.

(I) 求实数 a, b 的值;

(II) 函数 $f(x)$ 的最小值为 t , 若正实数 m, n, p 满足 $m + 2n + 3p = t$, 求 $\frac{1}{m + 2p} + \frac{1}{2n + p}$ 的最小值.

成都市 2021 级高中毕业班第二次诊断性检测

数 学(文科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设复数 $z = \frac{i}{1+i}$ (i 为虚数单位),则 $|z| =$
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{2}$
2. 命题“ $\forall x > 1, \ln x < x$ ”的否定形式是
(A) $\exists x_0 \leq 1, \ln x_0 \geq x_0$ (B) $\forall x \leq 1, \ln x < x$
(C) $\exists x_0 > 1, \ln x_0 \geq x_0$ (D) $\forall x > 1, \ln x \geq x$
3. 如图,已知集合 $A = \{x | \log_2 x < 1\}$, $B = \{x | x < 1\}$,则阴影部分表示的集合为
(A) $(1, 2)$ (B) $[1, 2)$ (C) $(0, 1]$ (D) $(0, 1)$
4. 对变量 x, y 有观测数据 $(x_i, y_i) (i \in \mathbb{N}^*)$,得散点图 1;对变量 u, v 有观测数据 $(u_i, v_i) (i \in \mathbb{N}^*)$,得散点图 2. r_1 表示变量 x, y 之间的线性相关系数, r_2 表示变量 u, v 之间的线性相关系数,则下列说法正确的是

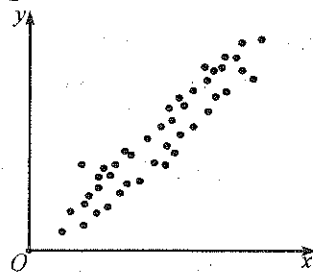


图 1

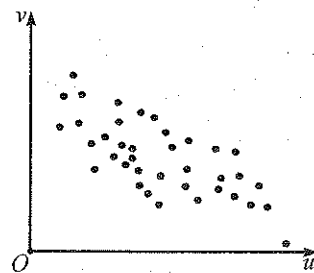


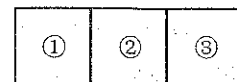
图 2

- (A) 变量 x 与 y 呈现正相关,且 $|r_1| < |r_2|$ (B) 变量 x 与 y 呈现负相关,且 $|r_1| > |r_2|$
(C) 变量 x 与 y 呈现正相关,且 $|r_1| > |r_2|$ (D) 变量 x 与 y 呈现负相关,且 $|r_1| < |r_2|$

5. 在平面直角坐标系 xOy 中,角 α 的顶点与坐标原点重合,始边与 x 轴的非负半轴重合,终边经过点 $P(1, 2)$,则 $\sin 2\alpha$ 的值为

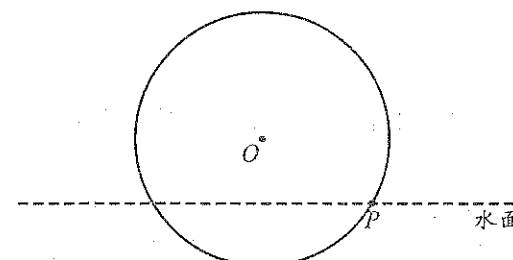
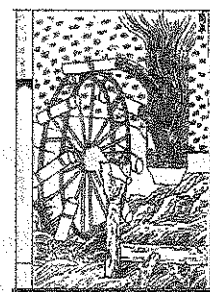
(A) $\frac{4}{5}$ (B) $-\frac{4}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $-\frac{3}{5}$

6. 现有两种不同的颜色要对如图形中的三个部分进行着色,其中任意有公共边的两块着不同颜色的概率为



(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

7. 筒车亦称“水转筒车”,是一种以水流作动力,取水灌田的工具,唐陈廷章《水轮赋》:“水能利物,轮乃曲成.升降满农夫之用,低徊随匠氏之程.始崩腾以电散,俄宛转以风生.虽破浪于川湄,善行无迹;既斡流于波面,终夜有声.”如图,一个半径为 4m 的筒车按逆时针方向每分钟转一圈,筒车的轴心 O 距离水面的高度为 2m. 在筒车转动的一圈内,盛水筒 P 距离水面的高度不低于 4m 的时间为



(A) 9 秒 (B) 12 秒 (C) 15 秒 (D) 20 秒

8. 已知函数 $f(x) = 2^{x^2+2x+a}$ 的值域为 M . 若 $(1, +\infty) \subseteq M$,则实数 a 的取值范围是
(A) $(-\infty, 1)$ (B) $(-\infty, 1]$ (C) $(1, +\infty)$ (D) $[1, +\infty)$
9. 已知向量 e_1, e_2 是平面 α 内的一组基向量, O 为 α 内的定点,对于 α 内任意一点 P ,当 $\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2$ 时,称有序实数对 (x, y) 为点 P 的广义坐标.若点 A, B 的广义坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,则“ $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB}$ ”是“ $x_1y_2 = x_2y_1$ ”的
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
10. 已知点 P 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1 (a > 0)$ 上的动点,若 P 到 x 轴与 y 轴的距离之和的最大值为 5,则椭圆 C 的离心率为
(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{7}}{4}$
11. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,点 P 在四边形 AA_1B_1B 内(含边界)运动. 当 $C_1P = \frac{\sqrt{21}}{3}CC_1$ 时,点 P 的轨迹长度为 $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$,则该正方体的表面积为
(A) 6 (B) 8 (C) 24 (D) 54
12. 已知 P 是抛物线 $C: x^2 = 4y + 20$ 上任意一点,若过点 P 作圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 的两条切线,切点分别记为 A, B ,则劣弧 AB 长度的最小值为
(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) π (D) $\frac{4\pi}{3}$

第Ⅱ卷 (非选择题,共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 一个几何体的三视图的正视图是三角形,则这个几何体可以是_____. (写出一个你认为正确的答案即可)

14. 已知函数 $f(x) = 3x - \sin x$, 若 $f(a) + f(a^2 - 2) > 0$, 则实数 a 的取值范围为_____.

15. 平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = 6, AD = CD = 4, BC = 2$, 若 A, B, C, D 四点共圆, 则该四边形的面积为_____.

16. 已知函数 $f(x) = \log_5(2^x + 3^x), g(x) = \log_3(6^x - 2^x)$. 给出下列四个结论:

① $f(\frac{1}{2}) < g(\frac{1}{2})$;

② 存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f(x_0) = g(x_0) = x_0$;

③ 对于任意的 $x \in (1, +\infty)$, 都有 $f(x) < g(x)$;

④ $|1 - f(1)| < |g(1) - 1|$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

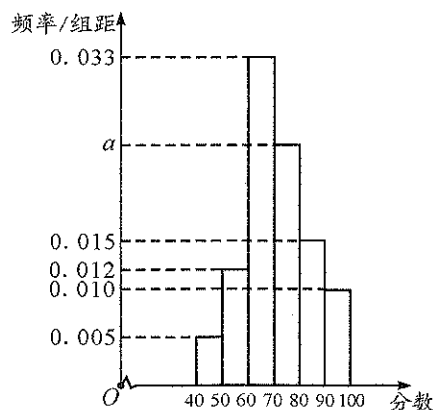
2024 年 1 月,某市的高二调研考试首次采用了“3+1+2”新高考模式. 该模式下,计算学生个人总成绩时,“3+1”的学科均以原始分记入,再选的“2”个学科(学生在政治、地理、化学、生物中选修的 2 科)以赋分成绩记入. 赋分成绩的具体算法是:先将该市某再选科目原始成绩按从高到低划分为 A, B, C, D, E 五个等级,各等级人数所占比例分别约为 15%, 35%, 35%, 13%, 2%. 依照转换公式,将五个等级的原始分分别转换到 100~86, 85~71, 70~56, 55~41, 40~30 五个分数区间,并对所得分数的小数点后一位进行“四舍五入”,最后得到保留为整数的转换分成绩,并作为赋分成绩. 具体等级比例和赋分区间如下表:

等级	A	B	C	D	E
比例	15%	35%	35%	13%	2%
赋分区间	100~86	85~71	70~56	55~41	40~30

已知该市本次高二调研考试化学科目考试满分为 100 分.

(I) 已知转换公式符合一次函数模型,若学生甲、乙在本次考试中化学的原始成绩分别为 84, 78, 转换分成绩为 78, 71, 试估算该市本次化学原始成绩 B 等级中的最高分.

(II) 现从该市本次高二调研考试的化学成绩中随机选取 100 名学生的原始成绩进行分析,其频率分布直方图如图所示,求出图中 a 的值,并用样本估计总体的方法,估计该市本次化学原始成绩 B 等级中的最低分.



18. (本小题满分 12 分)

记 $S_n(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - 2 (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^*)$.

(I) 当 $x = 2$ 时, $S_n(2)$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

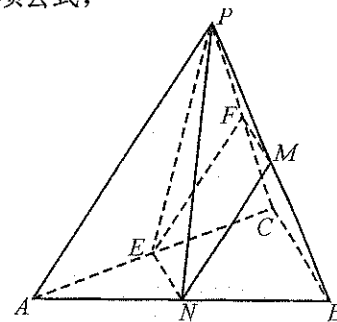
(II) 记 $S'_{2024}(x)$ 是 $S_{2024}(x)$ 的导函数,求 $S'_{2024}(2)$.

19. (本小题满分 12 分)

如图,在棱长为 2 的正四面体 $P-ABC$ 中, M, N, E, F 分别是棱 PB, AB, AC, PC 的中点.

(I) 证明: M, N, E, F 四点共面;

(II) 求四棱锥 $P-MNEF$ 的体积.



20. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{5} = 1 (a > 0)$ 的左、右顶点分别为 A, B , 右焦点为 F . 过点 F 的直线与双曲线 C 相交于 M, N 两点, 点 M 关于 x 轴的对称点为 S , 且直线 AM, BS 的斜率之积为 $-\frac{5}{4}$.

(I) 求双曲线 C 的标准方程;

(II) 直线 BM, BN 分别与直线 $x = 1$ 相交于 P, Q 两点, 求证: 以 PQ 为直径的圆经过 x 轴上的定点, 并求出定点的坐标.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{e} - \frac{2}{x+1}$.

(I) 判断 $f(x)$ 的零点个数并说明理由;

(II) 当 $x \geq 1$ 时, $af(x) \leq \frac{e^x}{e} + \ln x - 1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数})$.

(I) 求曲线 C 的普通方程;

(II) 以坐标原点 O 为极点, x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系. 若 A 为曲线 C 上任意一点, 将 OA 逆时针旋转 90° 得到 OB , 求线段 AB 中点 M 的轨迹的极坐标方程.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x + a| + b$, 不等式 $f(x) < 4$ 的解集为 $\{x | 0 < x < 6\}$.

(I) 求实数 a, b 的值;

(II) 函数 $f(x)$ 的最小值为 t , 若正实数 m, n, p 满足 $m + 2n + 3p = t$, 求 $\frac{1}{m+2p} + \frac{1}{2n+p}$ 的最小值.