

数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0, 1, 4\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{0\}$ B. $\{1\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1, 4\}$
2. 函数 $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ 的最小正周期是
A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π
3. $|2 - 4i| =$
A. 2 B. 4 C. $2\sqrt{5}$ D. 6
4. 已知向量 $a = (0, 1)$, $b = (1, 0)$, 则 $a \cdot (a - b) =$
A. 2 B. 1 C. 0 D. -1
5. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线方程为
A. $y = \pm x$ B. $y = \pm 2x$ C. $y = \pm 3x$ D. $y = \pm 4x$
6. 底面直径和母线长均为 2 的圆锥的体积为
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ B. π C. 2π D. 3π
7. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 8$, $AC = 10$, $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为
A. 6 B. 8 C. 24 D. 48
8. 已知函数 $f(x) = x|x - a| - 2a^2$. 若当 $x > 2$ 时, $f(x) > 0$, 则 a 的取值范围是
A. $(-\infty, 1]$ B. $[-2, 1]$ C. $[-1, 2]$ D. $[-1, +\infty)$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $F(2,0)$ 是抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的焦点， M 是 C 上的点， O 为坐标原点。则

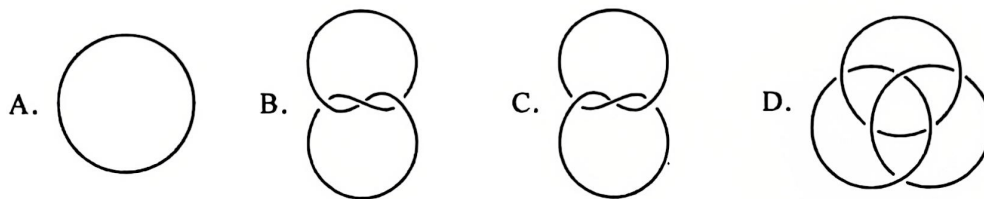
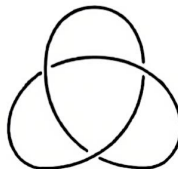
- A. $p = 4$
- B. $|MF| \geq |OF|$
- C. 以 M 为圆心且过 F 的圆与 C 的准线相切
- D. 当 $\angle OFM = 120^\circ$ 时， $\triangle OFM$ 的面积为 $2\sqrt{3}$

10. 在人工神经网络中，单个神经元输入与输出的函数关系可以称为激励函数。双曲正切函数是一种激励函数。定义双曲正弦函数 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ，双曲余弦函数

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ，双曲正切函数 $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ 。则

- A. 双曲正弦函数是增函数
- B. 双曲余弦函数是增函数
- C. 双曲正切函数是增函数
- D. $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

11. 下面四个绳结中，不能无损伤地变为右图中的绳结的有



三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)，若 $f(\ln 2)f(\ln 4) = 8$ ，则 $a =$ _____.

13. 有 8 张卡片，分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. 现从这 8 张卡片中随机抽出 3 张，则抽出的 3 张卡片上的数字之和与其余 5 张卡片上的数字之和相等的概率为_____.

14. 已知曲线 $C: y = x^3 - \frac{2}{x}$, 两条直线 l_1, l_2 均过坐标原点 O , l_1 和 C 交于 M, N 两点,

l_2 和 C 交于 P, Q 两点. 若 $\triangle OPM$ 的面积为 $\sqrt{2}$, 则 $\triangle MNQ$ 的面积为_____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

为考察某种药物 A 对预防疾病 B 的效果, 进行了动物 (单位: 只) 试验, 得到如下列联表:

药物	疾病		合计
	未患病	患病	
未服用	100	80	s
服用	150	70	220
合计	250	t	400

(1) 求 s, t ;

(2) 记未服用药物 A 的动物患疾病 B 的概率为 p , 给出 p 的估计值;

(3) 根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 能否认为药物 A 对预防疾病 B 有效?

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad \frac{P(\chi^2 \geq k)}{k} \begin{array}{c|ccc} 0.050 & 0.010 & 0.001 \\ \hline 3.841 & 6.635 & 10.828 \end{array}$$

16. (15 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 2}$.

(1) 证明: 数列 $\{1 - \frac{1}{a_n}\}$ 为等比数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 令 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 证明: $b_n < b_{n+1} < 1$.

17. (15 分)

已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x} - x$.

(1) 设 $a = 1$, $b = -2$, 求曲线 $y = f(x)$ 的斜率为 2 的切线方程;

(2) 若 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 求 b 的取值范围.

18. (17 分)

已知椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 左、右焦点分别为 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知点 $M_0(1,4)$, 证明: 线段 F_1M_0 的垂直平分线与 C 恰有一个公共点;

(3) 设 M 是坐标平面上的动点, 且线段 F_1M 的垂直平分线与 C 恰有一个公共点, 证明 M 的轨迹为圆, 并求该圆的方程.

19. (17 分)

在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB=AC=CD=1$, $\angle ADC=30^\circ$, $\angle DAB=120^\circ$, 将 $\triangle ACD$ 沿 AC 翻折至 $\triangle ACP$, 其中 P 为动点.

(1) 设 $PC \perp AB$, 三棱锥 $P-ABC$ 的各个顶点都在球 O 的球面上.

(i) 证明: 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ;

(ii) 求球 O 的半径;

(2) 求二面角 $A-CP-B$ 的余弦值的最小值.